

# Contrôlabilité approchée de l'équation de Schrödinger bilinéaire

Marco CAPONIGRO



Groupe de Travail « Contrôle »  
Paris, 11 mars 2011

# Contrôle quantique

Pouvoir changer l'état d'un système quantique est un problème dans plusieurs domaines de recherche :

- **Photochimie** (intervention de la lumière dans une réaction chimique) ;
- **Résonance magnétique nucléaire** (exploiter le phénomène de relaxation et l'émission) ;
- **Réalisation calculateur quantique** ;

en utilisant

- Lasers ;
- X-Rays ;
- Champs électrique/magnétique.

# Équation de Schrödinger bilinéaire

$$i \frac{d\psi}{dt} = (-\Delta + V)\psi + uW\psi$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ;
- $\psi = \psi(t, x)$  fonction d'onde,  $\psi(t, \cdot) \in L^2(\Omega)$ ,  $\|\psi(t, \cdot)\|_2 = 1$  ;
- $-\Delta + V$  opérateur de Schrödinger ;
- $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  potentiel non-contrôlé ;
- $u = u(t) \in U \subset \mathbb{R}$  loi de commande ;
- $W : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  potentiel de contrôle.

## Contrôlabilité

$\psi_0, \psi_1$  de norme  $L^2$  unitaire étant donnés, trouver (s'ils existent)  
 $k \in \mathbb{N}$ ,  $t_1, \dots, t_k > 0$ ,  $u_1, \dots, u_k \in U$  telles que

$$\psi_1 = e^{-it_k(-\Delta+V+u_kW)} \circ \dots \circ e^{-it_1(-\Delta+V+u_1W)}(\psi_0)$$

# Équation de Schrödinger bilinéaire

$$i \frac{d\psi}{dt} = (-\Delta + V)\psi + uW\psi$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ;
- $\psi = \psi(t, x)$  fonction d'onde,  $\psi(t, \cdot) \in L^2(\Omega)$ ,  $\|\psi(t, \cdot)\|_2 = 1$  ;
- $-\Delta + V$  opérateur de Schrödinger ;
- $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  potentiel non-contrôlé ;
- $u = u(t) \in U \subset \mathbb{R}$  loi de commande ;
- $W : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  potentiel de contrôle.

## Contrôlabilité

$\psi_0, \psi_1$  de norme  $L^2$  unitaire étant donnés, trouver (s'ils existent)  
 $k \in \mathbb{N}$ ,  $t_1, \dots, t_k > 0$ ,  $u_1, \dots, u_k \in U$  telles que

$$\psi_1 = e^{-it_k(-\Delta+V+u_kW)} \circ \dots \circ e^{-it_1(-\Delta+V+u_1W)}(\psi_0)$$

# Équation de Schrödinger bilinéaire

$$i \frac{d\psi}{dt} = (-\Delta + V)\psi + uW\psi$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ;
- $\psi = \psi(t, x)$  fonction d'onde,  $\psi(t, \cdot) \in L^2(\Omega)$ ,  $\|\psi(t, \cdot)\|_2 = 1$  ;
- $-\Delta + V$  opérateur de Schrödinger ;
- $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  potentiel non-contrôlé ;
- $u = u(t) \in U \subset \mathbb{R}$  loi de commande ;
- $W : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  potentiel de contrôle.

## Contrôlabilité

$\psi_0, \psi_1$  de norme  $L^2$  unitaire étant donnés, trouver (s' ils existent)  
 $k \in \mathbb{N}$ ,  $t_1, \dots, t_k > 0$ ,  $u_1, \dots, u_k \in U$  telles que

$$\psi_1 = e^{-it_k(-\Delta+V+u_kW)} \circ \dots \circ e^{-it_1(-\Delta+V+u_1W)}(\psi_0)$$

# Exemples

## Oscillateur harmonique quantique

$$i \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 + u(t)x \right) \psi(x, t), \quad x \in \mathbb{R},$$

- le potentiel de contrôle est la multiplication par  $x$ ,
- $u(t)$  l'intensité du champ extérieur au temps  $t$ .

## Puits de potentiel

$$i \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(t)x \right) \psi(x, t), \quad x \in (-1, 1), \quad \psi(\pm 1, t) = 0.$$

## Orientation d'une molécule bipolaire confinée dans un plan

$$i \frac{\partial \psi(\theta, t)}{\partial t} = \left( -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + u(t) \cos(\theta) \right) \psi(\theta, t), \quad \theta \in \mathbb{S}^1$$

- $\theta$  degré de liberté de rotation de la molécule,
- champ électrique orienté dans la direction  $(0, 1)$ .

# Exemples

## Oscillateur harmonique quantique

$$i \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 + u(t)x \right) \psi(x, t), \quad x \in \mathbb{R},$$

- le potentiel de contrôle est la multiplication par  $x$ ,
- $u(t)$  l'intensité du champ extérieur au temps  $t$ .

## Puits de potentiel

$$i \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(t)x \right) \psi(x, t), \quad x \in (-1, 1), \quad \psi(\pm 1, t) = 0.$$

## Orientation d'une molécule bipolaire confinée dans un plan

$$i \frac{\partial \psi(\theta, t)}{\partial t} = \left( -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + u(t) \cos(\theta) \right) \psi(\theta, t), \quad \theta \in \mathbb{S}^1$$

- $\theta$  degré de liberté de rotation de la molécule,
- champ électrique orienté dans la direction  $(0, 1)$ .

# Exemples

## Oscillateur harmonique quantique

$$i \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 + u(t)x \right) \psi(x, t), \quad x \in \mathbb{R},$$

- le potentiel de contrôle est la multiplication par  $x$ ,
- $u(t)$  l'intensité du champ extérieur au temps  $t$ .

## Puits de potentiel

$$i \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(t)x \right) \psi(x, t), \quad x \in (-1, 1), \quad \psi(\pm 1, t) = 0.$$

## Orientation d'une molécule bipolaire confinée dans un plan

$$i \frac{\partial \psi(\theta, t)}{\partial t} = \left( -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + u(t) \cos(\theta) \right) \psi(\theta, t), \quad \theta \in \mathbb{S}^1$$

- $\theta$  degré de liberté de rotation de la molécule,
- champ électrique orienté dans la direction  $(0, 1)$ .



# Résultats de contrôlabilité

## Résultats négatifs

- pas de contrôlabilité exacte sur la sphère unitaire de  $L^2(\Omega)$  (Ball-Marsden-Slemrod [1982], Turinici [2000]) ;
- pas de contrôlabilité pour l'oscillateur harmonique quantique (Mirrahimi-Rouchon [2004]).

## Résultats positifs

- Contrôlabilité exacte en  $H^3(\Omega)$  pour la puits de potentiel (Beauchard [2005], Beauchard-Coron [2006], Beauchard-Laurent [2010]) ;
- Contrôlabilité approchée en  $L^2$  et  $H^s$  par la méthode de Lyapunov (Mirrahimi [2006], Ito-Kunisch [2009], Nersesyan [2009]) ;
- Contrôlabilité approchée en  $L^2$  par des méthodes géométriques (Chambrion-Mason-Sigalotti-Boscain [2009]).

# Résultats de contrôlabilité

## Résultats négatifs

- pas de contrôlabilité exacte sur la sphère unitaire de  $L^2(\Omega)$  (Ball-Marsden-Slemrod [1982], Turinici [2000]) ;
- pas de contrôlabilité pour l'oscillateur harmonique quantique (Mirrahimi-Rouchon [2004]).

## Résultats positifs

- Contrôlabilité exacte en  $H^3(\Omega)$  pour la puits de potentiel (Beauchard [2005], Beauchard-Coron [2006], Beauchard-Laurent [2010]) ;
- Contrôlabilité approchée en  $L^2$  et  $H^s$  par la méthode de Lyapunov (Mirrahimi [2006], Ito-Kunisch [2009], Nersesyan [2009]) ;
- Contrôlabilité approchée en  $L^2$  par des méthodes géométriques (Chambrion-Mason-Sigalotti-Boscain [2009]).

# Résultats de contrôlabilité

## Résultats négatifs

- pas de contrôlabilité exacte sur la sphère unitaire de  $L^2(\Omega)$  (Ball-Marsden-Slemrod [1982], Turinici [2000]) ;
- pas de contrôlabilité pour l'oscillateur harmonique quantique (Mirrahimi-Rouchon [2004]).

## Résultats positifs

- Contrôlabilité exacte en  $H^3(\Omega)$  pour la puits de potentiel (Beauchard [2005], Beauchard-Coron [2006], Beauchard-Laurent [2010]) ;
- Contrôlabilité approchée en  $L^2$  et  $H^s$  par la méthode de Lyapunov (Mirrahimi [2006], Ito-Kunisch [2009], Nersesyan [2009]) ;
- Contrôlabilité approchée en  $L^2$  par des méthodes géométriques (Chambrion-Mason-Sigalotti-Boscain [2009]).

# Résultats de contrôlabilité

## Résultats négatifs

- pas de contrôlabilité exacte sur la sphère unitaire de  $L^2(\Omega)$  (Ball-Marsden-Slemrod [1982], Turinici [2000]) ;
- pas de contrôlabilité pour l'oscillateur harmonique quantique (Mirrahimi-Rouchon [2004]).

## Résultats positifs

- Contrôlabilité exacte en  $H^3(\Omega)$  pour la puits de potentiel (Beauchard [2005], Beauchard-Coron [2006], Beauchard-Laurent [2010]) ;
- Contrôlabilité approchée en  $L^2$  et  $H^s$  par la méthode de Lyapunov (Mirrahimi [2006], Ito-Kunisch [2009], Nersesyan [2009]) ;
- Contrôlabilité approchée en  $L^2$  par des méthodes géométriques (Chambrion-Mason-Sigalotti-Boscain [2009]).

# Résultats de contrôlabilité

## Résultats négatifs

- pas de contrôlabilité exacte sur la sphère unitaire de  $L^2(\Omega)$  (Ball-Marsden-Slemrod [1982], Turinici [2000]) ;
- pas de contrôlabilité pour l'oscillateur harmonique quantique (Mirrahimi-Rouchon [2004]).

## Résultats positifs

- Contrôlabilité exacte en  $H^3(\Omega)$  pour la puits de potentiel (Beauchard [2005], Beauchard-Coron [2006], Beauchard-Laurent [2010]) ;
- Contrôlabilité approchée en  $L^2$  et  $H^s$  par la méthode de Lyapunov (Mirrahimi [2006], Ito-Kunisch [2009], Nersesyan [2009]) ;
- Contrôlabilité approchée en  $L^2$  par des méthodes géométriques (Chambrion-Mason-Sigalotti-Boscain [2009]).

# Équation de Schrödinger bilinéaire : cadre général

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert complexe

$$\frac{d}{dt}\psi = A\psi + uB\psi, \quad u \in U. \quad (ES)$$

On suppose que :

- $A + uB : \text{span}\{\phi_k \mid k \in \mathbb{N}\} \rightarrow \mathcal{H}$  a une seule extension anti-adjoint pour tout  $u \in U$  ;
- $A$  a spectre discret  $(i\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ;
- $\mathcal{H}$  a une base d'Hilbert  $\Phi = (\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de fonctions propres de  $A$  ;
- $\phi_k \in D(B)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  ;
- si  $j \neq k$  et  $\lambda_j = \lambda_k$  alors  $\langle \phi_j, B\phi_k \rangle = 0$ .

Si tous les espaces propres de  $A$  sont de dimension finie, alors la dernière condition est bien vérifiée (à changement de base près).

# Équation de Schrödinger bilinéaire : cadre général

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert complexe

$$\frac{d}{dt}\psi = A\psi + uB\psi, \quad u \in U. \quad (ES)$$

On suppose que :

- $A + uB : \text{span}\{\phi_k \mid k \in \mathbb{N}\} \rightarrow \mathcal{H}$  a une seule extension anti-adjoint pour tout  $u \in U$  ;
- $A$  a spectre discret  $(i\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ;
- $\mathcal{H}$  a une base d'Hilbert  $\Phi = (\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de fonctions propres de  $A$  ;
- $\phi_k \in D(B)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  ;
- si  $j \neq k$  et  $\lambda_j = \lambda_k$  alors  $\langle \phi_j, B\phi_k \rangle = 0$ .

Si tous les espaces propres de  $A$  sont de dimension finie, alors la dernière condition est bien vérifiée (à changement de base près).

# Définitions

## Définition : propagateur et solution

$$\Upsilon_T^u(\psi_0) = e^{tk(A+u_k B)} \circ \dots \circ e^{t_1(A+u_1 B)}(\psi_0)$$

est la **solution** de  $(ES)$  avec donnée initiale  $\psi_0 \in \mathcal{H}$  associée à la loi de commande constante par morceaux  $u = u_1 \chi_{[0,t_1]} + u_2 \chi_{[t_1,t_1+t_2]} + \dots$ .  $\Upsilon_t^u$  est dit **propagateur** de  $(ES)$  associé à  $u$ .

## Contrôlabilité approchée

$\varepsilon > 0$ ,  $\psi_0, \psi_1 \in \mathcal{H}$  étant donnés, trouver une loi  $u : [0, T] \rightarrow U$  telle que

$$\|\Upsilon_T^u(\psi_0) - \psi_1\| < \varepsilon.$$

## Contrôlabilité approchée simultanée

$\varepsilon > 0$ ,  $\psi^1, \dots, \psi^m \in \mathcal{H}$ ,  $\hat{\Upsilon} \in \mathbf{U}(\mathcal{H})$  étant donnés, trouver une loi de commande  $u : [0, T] \rightarrow U$  telle que

$$\|\hat{\Upsilon}(\psi^j) - \Upsilon_T^u(\psi^j)\| < \varepsilon \quad j = 1, \dots, m.$$



# Définitions

## Définition : propagateur et solution

$$\Upsilon_T^u(\psi_0) = e^{tk(A+u_kB)} \circ \dots \circ e^{t_1(A+u_1B)}(\psi_0)$$

est la **solution** de  $(ES)$  avec donnée initiale  $\psi_0 \in \mathcal{H}$  associée à la loi de commande constante par morceaux  $u = u_1\chi_{[0,t_1]} + u_2\chi_{[t_1,t_1+t_2]} + \dots$ .  $\Upsilon_t^u$  est dit **propagateur** de  $(ES)$  associé à  $u$ .

## Contrôlabilité approchée

$\varepsilon > 0$ ,  $\psi_0, \psi_1 \in \mathcal{H}$  étant donnés, trouver une loi  $u : [0, T] \rightarrow U$  telle que

$$\|\Upsilon_T^u(\psi_0) - \psi_1\| < \varepsilon.$$

## Contrôlabilité approchée simultanée

$\varepsilon > 0$ ,  $\psi^1, \dots, \psi^m \in \mathcal{H}$ ,  $\hat{\Upsilon} \in \mathbf{U}(\mathcal{H})$  étant donnés, trouver une loi de commande  $u : [0, T] \rightarrow U$  telle que

$$\|\hat{\Upsilon}(\psi^j) - \Upsilon_T^u(\psi^j)\| < \varepsilon \quad j = 1, \dots, m.$$

# Définitions

## Définition : propagateur et solution

$$\Upsilon_T^u(\psi_0) = e^{tk(A+u_kB)} \circ \dots \circ e^{t_1(A+u_1B)}(\psi_0)$$

est la **solution** de  $(ES)$  avec donnée initiale  $\psi_0 \in \mathcal{H}$  associée à la loi de commande constante par morceaux  $u = u_1\chi_{[0,t_1]} + u_2\chi_{[t_1,t_1+t_2]} + \dots$ .  $\Upsilon_t^u$  est dit **propagateur** de  $(ES)$  associé à  $u$ .

## Contrôlabilité approchée

$\varepsilon > 0$ ,  $\psi_0, \psi_1 \in \mathcal{H}$  étant donnés, trouver une loi  $u : [0, T] \rightarrow U$  telle que

$$\|\Upsilon_T^u(\psi_0) - \psi_1\| < \varepsilon.$$

## Contrôlabilité approchée simultanée

$\varepsilon > 0$ ,  $\psi^1, \dots, \psi^m \in \mathcal{H}$ ,  $\hat{\Upsilon} \in \mathbf{U}(\mathcal{H})$  étant donnés, trouver une loi de commande  $u : [0, T] \rightarrow U$  telle que

$$\|\hat{\Upsilon}(\psi^j) - \Upsilon_T^u(\psi^j)\| < \varepsilon \quad j = 1, \dots, m.$$

# Chaîne de connexité

$S \subset \mathbb{N}^2$  est une **chaîne de connexité** pour  $(A, B)$  si

- $\langle \phi_\alpha, B\phi_\beta \rangle \neq 0$  pour tout  $(\alpha, \beta) \in S$ ;
- pour tout  $j \leq k \in \mathbb{N}$ , il existe  $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_p, \beta_p)$  en  $S$  telle que

$$j = \alpha_1, \quad \beta_1 = \alpha_2 \quad \dots \quad \beta_{p-1} = \alpha_p, \quad \beta_p = k.$$

Exemples :

- Nersesyan [2009] :  $S = \{(1, n) : n \in \mathbb{N}\}$ ,
- Chambrion et al. [2009] :  $S = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$ .

Une **chaîne de connexité** pour  $(A, B)$ ,  $S$  est **non résonante** si

$$|\lambda_j - \lambda_k| \neq |\lambda_\ell - \lambda_m|$$

pour tout  $(j, k) \in S$ ,  $(\ell, m) \in \mathbb{N}^2$ ,  $\{j, k\} \neq \{\ell, m\}$ .

# Chaîne de connexité

$S \subset \mathbb{N}^2$  est une **chaîne de connexité** pour  $(A, B)$  si

- $\langle \phi_\alpha, B\phi_\beta \rangle \neq 0$  pour tout  $(\alpha, \beta) \in S$ ;
- pour tout  $j \leq k \in \mathbb{N}$ , il existe  $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_p, \beta_p)$  en  $S$  telle que

$$j = \alpha_1, \quad \beta_1 = \alpha_2 \quad \dots \quad \beta_{p-1} = \alpha_p, \quad \beta_p = k.$$

## Exemples :

- Nersesyan [2009] :  $S = \{(1, n) : n \in \mathbb{N}\}$ ,
- Chambrion et al. [2009] :  $S = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$ .

Une **chaîne de connexité** pour  $(A, B)$ ,  $S$  est **non résonante** si

$$|\lambda_j - \lambda_k| \neq |\lambda_\ell - \lambda_m|$$

pour tout  $(j, k) \in S, (\ell, m) \in \mathbb{N}^2, \{j, k\} \neq \{\ell, m\}$ .

# Chaîne de connexité

$S \subset \mathbb{N}^2$  est une **chaîne de connexité** pour  $(A, B)$  si

- $\langle \phi_\alpha, B\phi_\beta \rangle \neq 0$  pour tout  $(\alpha, \beta) \in S$ ;
- pour tout  $j \leq k \in \mathbb{N}$ , il existe  $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_p, \beta_p)$  en  $S$  telle que

$$j = \alpha_1, \quad \beta_1 = \alpha_2 \quad \dots \quad \beta_{p-1} = \alpha_p, \quad \beta_p = k.$$

## Exemples :

- Nersesyan [2009] :  $S = \{(1, n) : n \in \mathbb{N}\}$ ,
- Chambrion et al. [2009] :  $S = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$ .

Une **chaîne de connexité** pour  $(A, B)$ ,  $S$  est **non résonante** si

$$|\lambda_j - \lambda_k| \neq |\lambda_\ell - \lambda_m|$$

pour tout  $(j, k) \in S, (\ell, m) \in \mathbb{N}^2, \{j, k\} \neq \{\ell, m\}$ .

# Le résultat

$S \subset \mathbb{N}^2$  est une **chaîne de connexité non résonante** pour  $(A, B)$  si

- $\langle \phi_\alpha, B\phi_\beta \rangle \neq 0$  pour tout  $(\alpha, \beta) \in S$ ;
- pour tout  $j \leq k \in \mathbb{N}$ , il existe  $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_p, \beta_p)$  en  $S$  telle que

$$j = \alpha_1, \quad \beta_1 = \alpha_2 \quad \dots \quad \beta_{p-1} = \alpha_p, \quad \beta_p = k;$$

- $|\lambda_\alpha - \lambda_\beta| \neq |\lambda_j - \lambda_k|$ ;  
pour tout  $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ ,  $(\alpha, \beta) \in S$ ,  $\{\alpha, \beta\} \neq \{j, k\}$ .

## Théorème (Boscain, Caponigro, Chambrion, Sigalotti)

Si  $(A, B)$  a une chaîne de connexité non résonante, alors,  $(A, B)$  est simultanément contrôlable de façon approchée.

# Le résultat

$S \subset \mathbb{N}^2$  est une **chaîne de connexité non résonante** pour  $(A, B)$  si

- $\langle \phi_\alpha, B\phi_\beta \rangle \neq 0$  pour tout  $(\alpha, \beta) \in S$ ;
- pour tout  $j \leq k \in \mathbb{N}$ , il existe  $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_p, \beta_p)$  en  $S$  telle que

$$j = \alpha_1, \quad \beta_1 = \alpha_2 \quad \dots \quad \beta_{p-1} = \alpha_p, \quad \beta_p = k;$$

- $|\lambda_\alpha - \lambda_\beta| \neq |\lambda_j - \lambda_k|$ ;  
pour tout  $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ ,  $(\alpha, \beta) \in S$ ,  $\{\alpha, \beta\} \neq \{j, k\}$ .

## Théorème (Boscain, Caponigro, Chambrion, Sigalotti)

Si  $(A, B)$  a une chaîne de connexité non résonante, alors,  $(A, B)$  est simultanément contrôlable de façon approchée.

# Le cœur de la preuve

## Lemme

Soit  $\delta > 0$ . Si  $(A, B)$  a une chaîne de connexité non résonante, alors

- pour toute courbe continue  $\hat{\Upsilon} : [0, T] \rightarrow \mathbf{U}(\mathcal{H})$ ,
- $m \in \mathbb{N}$ ,
- $\varepsilon > 0$ ,

ils existent

- $T_u > 0$ ,
- une bijection  $s : [0, T] \rightarrow [0, T_u]$ ,
- une commande constante par morceaux  $u : [0, T_u] \rightarrow [0, \delta]$

telles que

$$|\langle \phi_j, \hat{\Upsilon}_t \phi_k \rangle| - |\langle \phi_j, \Upsilon_{s(t)}^u \phi_k \rangle| < \varepsilon \quad \text{pour tout } t \in [0, T], j \in \mathbb{N}, k \leq m.$$

En effet on peut suivre les trajectoires.



# 1ère étape : changement de variable

- grâce à une reparamétrisation du temps :  $e^{t(A+uB)} = e^{tu(\frac{1}{u}A+B)}$   
(ES) devient

$$\dot{X} = vAX + BX,$$

Cette reparamétrisation du temps échange le temps et la norme  $L^1$

- On considère  $Y = e^{-\int vA} X$ , alors on a

$$\dot{Y} = e^{-\int vA} B e^{\int vA} Y \quad (ES)'$$

$$|\langle \phi_k, Y \rangle| = |\langle \phi_k, X \rangle|, \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}$$

- Approximation de Galerkin d'ordre  $N$  :

$$\dot{Y} = \left( e^{i(\lambda_j - \lambda_k) \int v} b_{jk} \right)_{j,k \leq N} Y. \quad (ES)'_N$$

# 1ère étape : changement de variable

- grâce à une reparamétrisation du temps :  $e^{t(A+uB)} = e^{tu(\frac{1}{u}A+B)}$   
(ES) devient

$$\dot{X} = vAX + BX,$$

Cette reparamétrisation du temps échange le temps et la norme  $L^1$

- On considère  $Y = e^{-\int vA} X$ , alors on a

$$\dot{Y} = e^{-\int vA} B e^{\int vA} Y \quad (ES)'$$

$$|\langle \phi_k, Y \rangle| = |\langle \phi_k, X \rangle|, \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}$$

- Approximation de Galerkin d'ordre  $N$  :

$$\dot{Y} = \left( e^{i(\lambda_j - \lambda_k) \int v} b_{jk} \right)_{j,k \leq N} Y. \quad (ES)'_N$$

# 1ère étape : changement de variable

- grâce à une reparamétrisation du temps :  $e^{t(A+uB)} = e^{tu(\frac{1}{u}A+B)}$   
(ES) devient

$$\dot{X} = vAX + BX,$$

Cette reparamétrisation du temps échange le temps et la norme  $L^1$

- On considère  $Y = e^{-\int vA} X$ , alors on a

$$\dot{Y} = e^{-\int vA} B e^{\int vA} Y \quad (ES)'$$

$$|\langle \phi_k, Y \rangle| = |\langle \phi_k, X \rangle|, \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}$$

- Approximation de Galerkin d'ordre  $N$  :

$$\dot{Y} = \left( e^{i(\lambda_j - \lambda_k) \int v} b_{jk} \right)_{j,k \leq N} Y. \quad (ES)'_N$$

# L'idée : convexification

On considère la famille de matrices

$$\left\{ \left( e^{i(\lambda_j - \lambda_k)\omega} b_{jk} \right)_{j,k \leq N} : \omega \in \mathbb{R} \right\}$$

On étudie la courbe sur le torus,

$$\Psi : \omega \mapsto \left( e^{i(\lambda_{j_1} - \lambda_{k_1})\omega}, \dots, e^{i(\lambda_{j_m} - \lambda_{k_m})\omega} \right).$$

Si  $\nu \geq \prod_{k=2}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2k}\right) = 0.4298\dots$  alors

$$\overline{\text{Conv}\Psi([0, \infty))} \supset \nu \mathbb{S}^1 \times \{0\} \times \dots \times \{0\}.$$

Exemple :  $m = 2, \lambda_{j_1} - \lambda_{k_1} = 1, \lambda_{j_2} - \lambda_{k_2} = 2,$

$$\text{Conv}\{\Psi(0), \Psi(\pi/2)\} = \left( \frac{1+i}{2}, 0 \right),$$

donc

$$\text{Conv}\Psi([0, \infty)) \supset \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbb{S}^1 \times \{0\}, \quad \text{et } \frac{\sqrt{2}}{2} > \nu.$$

# L'idée : convexification

On considère la famille de matrices

$$\left\{ \left( e^{i(\lambda_j - \lambda_k)\omega} b_{jk} \right)_{j,k \leq N} : \omega \in \mathbb{R} \right\}$$

On étudie la courbe sur le torus,

$$\Psi : \omega \mapsto \left( e^{i(\lambda_{j_1} - \lambda_{k_1})\omega}, \dots, e^{i(\lambda_{j_m} - \lambda_{k_m})\omega} \right).$$

Si  $\nu \geq \prod_{k=2}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2k}\right) = 0.4298\dots$  alors

$$\overline{\text{Conv}\Psi([0, \infty))} \supset \nu \mathbb{S}^1 \times \{0\} \times \dots \times \{0\}.$$

Exemple :  $m = 2, \lambda_{j_1} - \lambda_{k_1} = 1, \lambda_{j_2} - \lambda_{k_2} = 2,$

$$\text{Conv}\{\Psi(0), \Psi(\pi/2)\} = \left( \frac{1+i}{2}, 0 \right),$$

donc

$$\text{Conv}\Psi([0, \infty)) \supset \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbb{S}^1 \times \{0\}, \quad \text{et } \frac{\sqrt{2}}{2} > \nu.$$

# L'idée : convexification

On considère la famille de matrices

$$\left\{ \left( e^{i(\lambda_j - \lambda_k)\omega} b_{jk} \right)_{j,k \leq N} : \omega \in \mathbb{R} \right\}$$

On étudie la courbe sur le torus,

$$\Psi : \omega \mapsto \left( e^{i(\lambda_{j_1} - \lambda_{k_1})\omega}, \dots, e^{i(\lambda_{j_m} - \lambda_{k_m})\omega} \right).$$

Si  $\nu \geq \prod_{k=2}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2k}\right) = 0.4298\dots$  alors

$$\overline{\text{Conv}\Psi([0, \infty))} \supset \nu \mathbb{S}^1 \times \{0\} \times \dots \times \{0\}.$$

**Exemple :**  $m = 2, \lambda_{j_1} - \lambda_{k_1} = 1, \lambda_{j_2} - \lambda_{k_2} = 2,$

$$\text{Conv}\{\Psi(0), \Psi(\pi/2)\} = \left( \frac{1+i}{2}, 0 \right),$$

donc

$$\text{Conv}\Psi([0, \infty)) \supset \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbb{S}^1 \times \{0\}, \quad \text{et } \frac{\sqrt{2}}{2} > \nu.$$

# Convexification II

On peut trouver,  $\theta \in \mathbb{S}^1$  étant donnée, une suite  $(\omega_k)_{k \geq 1}$  telle que

$$\frac{1}{H} \sum_{k=1}^H \Psi(\omega_k) \xrightarrow{H \rightarrow \infty} (\nu e^{i\theta}, 0, \dots, 0),$$

à partir de laquelle, pour tout  $N \geq n$ , on peut construire une suite de lois de commande  $v_H$  telle que

$$\int_{t_0}^t \left( e^{i(\lambda_\ell - \lambda_m)} \int_0^s v_H(\tau) d\tau b_{\ell m} \right)_{\ell, m \leq N} ds \xrightarrow{H \rightarrow \infty}$$

$$\int_{t_0}^t \left( \begin{array}{c|c} \nu |b_{jk}| \left( e^{i\theta} e_{jk}^{(n)} - e^{-i\theta} e_{kj}^{(n)} \right) & \mathbf{0}_{n \times N-n} \\ \hline \mathbf{0}_{N-n \times n} & \mathbf{0}_{N-n \times N-n} \end{array} \right) ds$$

uniformément en  $t \in [t_0, t_1]$ , où  $(j, k) \in S \cap \{1, \dots, n\}^2$ ,  $\theta \in \mathbb{S}^1$ .

# Contrôlabilité sur $SU(n)$

Le système

$$\dot{x} = \nu |b_{jk}| \left( e^{i\theta} e_{jk}^{(n)} - e^{-i\theta} e_{kj}^{(n)} \right) x, \quad x \in SU(n) \quad (\Sigma_n)$$

est contrôlable par des lois de commande constantes par morceaux

$$(j, k) : [0, T_\Sigma] \rightarrow S|_{\{1, \dots, n\}^2} \quad \theta : [0, T_\Sigma] \rightarrow \mathbb{S}^1$$

existence d'une chaîne de connexité



condition d'Hörmander pour  $(\Sigma_n)$



on peut suivre toutes trajectoires en  $SU(n)$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  suffisamment grand tel que

$$\|(\text{Id} - \pi_n) \hat{Y}_t(\phi_k)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, T], k \leq m,$$

où  $\pi_n(\psi) = (\langle \phi_1, \psi \rangle, \dots, \langle \phi_n, \psi \rangle)$ .



# Contrôlabilité sur $SU(n)$

Le système

$$\dot{x} = \nu |b_{jk}| \left( e^{i\theta} e_{jk}^{(n)} - e^{-i\theta} e_{kj}^{(n)} \right) x, \quad x \in SU(n) \quad (\Sigma_n)$$

est contrôlable par des lois de commande constantes par morceaux

$$(j, k) : [0, T_\Sigma] \rightarrow S|_{\{1, \dots, n\}^2} \quad \theta : [0, T_\Sigma] \rightarrow \mathbb{S}^1$$

existence d'une chaîne de connexité



condition d'Hörmander pour  $(\Sigma_n)$



on peut suivre toutes trajectoires en  $SU(n)$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  suffisamment grand tel que

$$\|(\text{Id} - \pi_n) \hat{Y}_t(\phi_k)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, T], k \leq m,$$

où  $\pi_n(\psi) = (\langle \phi_1, \psi \rangle, \dots, \langle \phi_n, \psi \rangle)$ .

# Contrôlabilité sur $SU(n)$

Le système

$$\dot{x} = \nu |b_{jk}| \left( e^{i\theta} e_{jk}^{(n)} - e^{-i\theta} e_{kj}^{(n)} \right) x, \quad x \in SU(n) \quad (\Sigma_n)$$

est contrôlable par des lois de commande constantes par morceaux

$$(j, k) : [0, T_\Sigma] \rightarrow S|_{\{1, \dots, n\}^2} \quad \theta : [0, T_\Sigma] \rightarrow \mathbb{S}^1$$

existence d'une chaîne de connexité



condition d'Hörmander pour  $(\Sigma_n)$



on peut suivre toutes trajectoires en  $SU(n)$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  suffisamment grand tel que

$$\|(\text{Id} - \pi_n) \hat{Y}_t(\phi_k)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, T], k \leq m,$$

où  $\pi_n(\psi) = (\langle \phi_1, \psi \rangle, \dots, \langle \phi_n, \psi \rangle)$ .

# Contrôlabilité sur $SU(n)$

Le système

$$\dot{x} = \nu |b_{jk}| \left( e^{i\theta} e_{jk}^{(n)} - e^{-i\theta} e_{kj}^{(n)} \right) x, \quad x \in SU(n) \quad (\Sigma_n)$$

est contrôlable par des lois de commande constantes par morceaux

$$(j, k) : [0, T_\Sigma] \rightarrow S|_{\{1, \dots, n\}^2} \quad \theta : [0, T_\Sigma] \rightarrow \mathbb{S}^1$$

existence d'une chaîne de connexité



condition d'Hörmander pour  $(\Sigma_n)$



on peut suivre toutes trajectoires en  $SU(n)$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  suffisamment grand tel que

$$\|(\text{Id} - \pi_n) \hat{Y}_t(\phi_k)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, T], k \leq m,$$

où  $\pi_n(\psi) = (\langle \phi_1, \psi \rangle, \dots, \langle \phi_n, \psi \rangle)$ .

# Contrôlabilité sur $SU(n)$

Le système

$$\dot{x} = \nu |b_{jk}| \left( e^{i\theta} e_{jk}^{(n)} - e^{-i\theta} e_{kj}^{(n)} \right) x, \quad x \in SU(n) \quad (\Sigma_n)$$

est contrôlable par des lois de commande constantes par morceaux

$$(j, k) : [0, T_\Sigma] \rightarrow S|_{\{1, \dots, n\}^2} \quad \theta : [0, T_\Sigma] \rightarrow \mathbb{S}^1$$

existence d'une chaîne de connexité



condition d'Hörmander pour  $(\Sigma_n)$



on peut suivre toutes trajectoires en  $SU(n)$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  suffisamment grand tel que

$$\|(\text{Id} - \pi_n) \hat{Y}_t(\phi_k)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, T], k \leq m,$$

où  $\pi_n(\psi) = (\langle \phi_1, \psi \rangle, \dots, \langle \phi_n, \psi \rangle)$ .

# Dimension infinie

Le système  $(ES)'$  est telle que l'intégrale entre 0 et  $t$  est

$$\begin{pmatrix} \nu |b_{jk}| \left( e^{i\theta} e_{jk}^{(n)} - e^{-i\theta} e_{kj}^{(n)} \right) & 0_{n \times N-n} & R(t) \\ 0_{N-n \times n} & 0_{N-n \times N-n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

où  $(j, k, \theta) = (j(t), k(t), \theta(t)) \in S|_{\{1, \dots, n\}^2} \times \mathbb{S}^1$ .

- On choisit un entier  $N$  tel que  $\sum_{k>N} |b_{jk}|^2$  est suffisamment petite pour tout  $j = 1, \dots, n$  (grâce à l'hypothèse  $\phi_j \in D(B)$ ).
- En général  $N > n$ .

Molecule :

- $\langle \phi_j, B\phi_k \rangle \neq 0 \iff |j - k| = 1$  ;
- $\langle \phi_k, B\phi_{k+1} \rangle = \frac{i}{2}$  pour  $k > 1$ .



# Dimension infinie

Le système  $(ES)'$  est telle que l'intégrale entre 0 et  $t$  est

$$\begin{pmatrix} \nu |b_{jk}| \left( e^{i\theta} e_{jk}^{(n)} - e^{-i\theta} e_{kj}^{(n)} \right) & 0_{n \times N-n} & R(t) \\ 0_{N-n \times n} & 0_{N-n \times N-n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

où  $(j, k, \theta) = (j(t), k(t), \theta(t)) \in S|_{\{1, \dots, n\}^2} \times \mathbb{S}^1$ .

- On choisit un entier  $N$  tel que  $\sum_{k>N} |b_{jk}|^2$  est suffisamment petite pour tout  $j = 1, \dots, n$  (grâce à l'hypothèse  $\phi_j \in D(B)$ ).
- En général  $N > n$ .

Molecule :

- $\langle \phi_j, B\phi_k \rangle \neq 0 \iff |j - k| = 1$  ;
- $\langle \phi_k, B\phi_{k+1} \rangle = \frac{i}{2}$  pour  $k > 1$ .



# Estimation de la norme $L^1$ du contrôle

- Le temps de contrôle du système  $(ES)'$  ne dépend pas de la précision de l'approximation ;
- dans la première étape on a changé la taille du contrôle et le temps du contrôle.

## Théorème (Boscain, Caponigro, Chambrion, Sigalotti)

Si  $(A, B)$  a une chaîne de connexité non résonante qui contient  $(1, 2)$ , alors pour tout  $\varepsilon, \delta > 0$ , il existe  $u : [0, T] \rightarrow [0, \delta]$  telle que

$$\|\Upsilon_T^u(\phi_1) - \phi_2\| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|u\|_{L^1} \leq \frac{\pi}{2\nu|\langle \phi_1, B\phi_2 \rangle|}.$$

# Estimation de la norme $L^1$ du contrôle

- Le temps de contrôle du système  $(ES)'$  ne dépend pas de la précision de l'approximation ;
- dans la première étape on a changé la taille du contrôle et le temps du contrôle.

## Théorème (Boscain, Caponigro, Chambrion, Sigalotti)

Si  $(A, B)$  a une chaîne de connexité non résonante qui contient  $(1, 2)$ , alors pour tout  $\varepsilon, \delta > 0$ , il existe  $u : [0, T] \rightarrow [0, \delta]$  telle que

$$\|\Upsilon_T^u(\phi_1) - \phi_2\| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|u\|_{L^1} \leq \frac{\pi}{2\nu|\langle \phi_1, B\phi_2 \rangle|}.$$



# Contrôlabilité en $H^s$

$$\|x\|_{A^s} = \sqrt{\langle (-iA)^s x, x \rangle}$$

On suppose que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $K \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $s > 0$  il existe  $N \in \mathbb{N}$  telle que pour tout  $u \in L^1(0, \infty)$

$$\|u\|_{L^1} \leq K \implies \|(\text{Id} - \pi_N) \Upsilon_t^u(\phi_j)\|_{A^s} < \varepsilon \quad (*)$$

pour tout  $t \geq 0, j = 1, \dots, n$ .

## Théorème (Boussaïd, Caponigro, Chambrion)

Si  $\lambda_k \nearrow \infty$  et si  $(A, B)$  a une chaîne de connexité non résonante, alors,  $(A, B)$  est simultanément contrôlable de façon approchée pour la norme  $\|\cdot\|_{A^s}$ .

## Exemple

On peut aussi contrôler la molécule par des lois de commande constantes par morceaux à valeurs en  $\{0, \delta\}$ .

# Contrôlabilité en $H^s$

$$\|x\|_{A^s} = \sqrt{\langle (-iA)^s x, x \rangle}$$

On suppose que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $K \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $s > 0$  il existe  $N \in \mathbb{N}$  telle que pour tout  $u \in L^1(0, \infty)$

$$\|u\|_{L^1} \leq K \implies \|(\text{Id} - \pi_N) \Upsilon_t^u(\phi_j)\|_{A^s} < \varepsilon \quad (*)$$

pour tout  $t \geq 0, j = 1, \dots, n$ .

## Théorème (Boussaïd, Caponigro, Chambrion)

Si  $\lambda_k \nearrow \infty$  et si  $(A, B)$  a une chaîne de connexité non résonante, alors,  $(A, B)$  est simultanément contrôlable de façon approchée pour la norme  $\|\cdot\|_{A^s}$ .

## Exemple

On peut aussi contrôler la molécule par des lois de commande constantes par morceaux à valeurs en  $\{0, \delta\}$ .

# Contrôlabilité en $H^s$

$$\|x\|_{A^s} = \sqrt{\langle (-iA)^s x, x \rangle}$$

On suppose que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $K \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $s > 0$  il existe  $N \in \mathbb{N}$  telle que pour tout  $u \in L^1(0, \infty)$

$$\|u\|_{L^1} \leq K \implies \|(\text{Id} - \pi_N) \Upsilon_t^u(\phi_j)\|_{A^s} < \varepsilon \quad (*)$$

pour tout  $t \geq 0, j = 1, \dots, n$ .

## Théorème (Boussaïd, Caponigro, Chambrion)

Si  $\lambda_k \nearrow \infty$  et si  $(A, B)$  a une chaîne de connexité non résonante, alors,  $(A, B)$  est simultanément contrôlable de façon approchée pour la norme  $\|\cdot\|_{A^s}$ .

## Exemple

On peut aussi contrôler la molécule par des lois de commande constantes par morceaux à valeurs en  $\{0, \delta\}$ .

# Exemple : la molécule

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t}(\theta, t) = -\frac{1}{2} \partial_\theta^2 \psi(\theta, t) + u(t) \cos(\theta) \psi(\theta, t) \quad \theta \in \mathbb{S}^1$$

- Valeurs propres :  $0, i, 4i, 9i, \dots, k^2 i, \dots$ ;
- Potentiel de contrôle

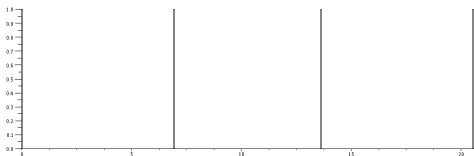
$$B = i \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & \dots & \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 & 0 & \dots \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ \vdots & 0 & 1/2 & 0 & \ddots \\ & \vdots & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

- $\{(k, k \pm 1); k \in \mathbf{N}\}$  est une chaîne de connexité non-résonante ;
- $\|\cdot\|_{A^s}$  est la norme de Sobolev de  $H^s$  ;
- $B$  est borné pour toutes les normes  $\|\cdot\|_{H^s}$ .

Le système est simultanément contrôlable de façon approchée en norme  $H^s$  pour tout  $s$ .

# L'algorithme : "q-track"

- On considère le problème d'échanger les états 1 et 2.<sup>1</sup>
- On peut trouver la loi de commande explicitement



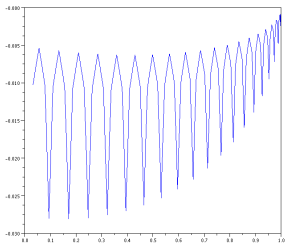
- Cette loi  $u : [0, T] \rightarrow \{0, 1\}$  est telle que

$$\begin{pmatrix} \langle \phi_1, \Upsilon_0^u(\phi_1) \rangle & \langle \phi_1, \Upsilon_0^u(\phi_2) \rangle \\ \langle \phi_2, \Upsilon_0^u(\phi_1) \rangle & \langle \phi_2, \Upsilon_0^u(\phi_2) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

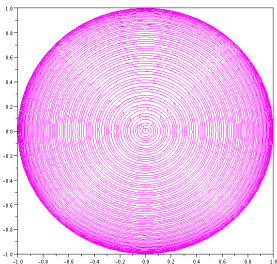
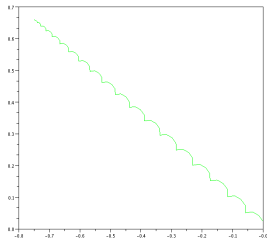
$$\begin{pmatrix} \langle \phi_1, \Upsilon_T^u(\phi_1) \rangle & \langle \phi_1, \Upsilon_T^u(\phi_2) \rangle \\ \langle \phi_2, \Upsilon_T^u(\phi_1) \rangle & \langle \phi_2, \Upsilon_T^u(\phi_2) \rangle \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_1} \\ e^{i\theta_2} & 0 \end{pmatrix}$$

1.  $\varepsilon = 0.03, H = 20, \text{time} = 121, \|u\|_{L^1} = 2.66\dots$

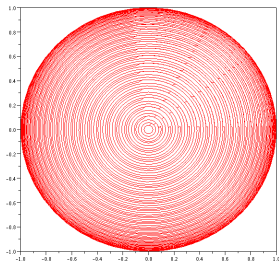
$$\langle \phi_1, \Upsilon_t^u(\phi_1) \rangle$$



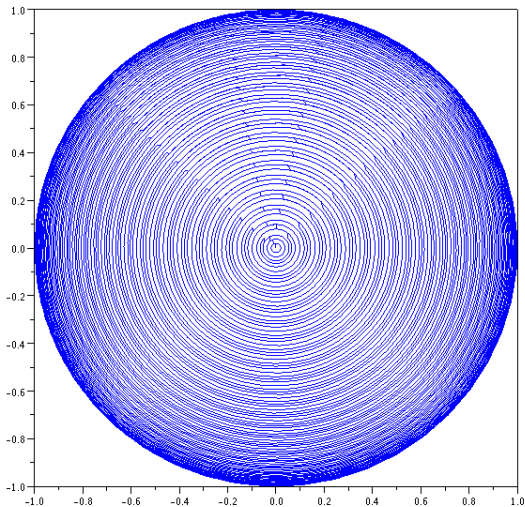
$$\langle \phi_1, \Upsilon_t^u(\phi_2) \rangle$$



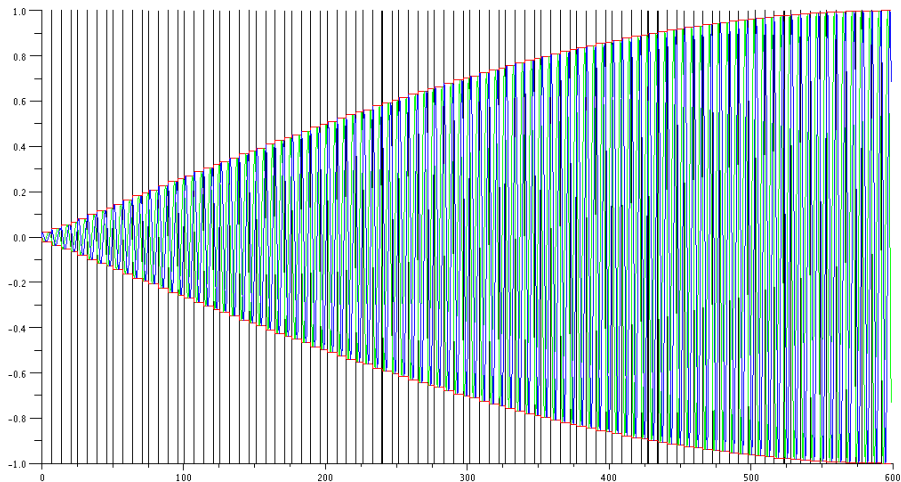
$$\langle \phi_2, \Upsilon_t^u(\phi_1) \rangle$$



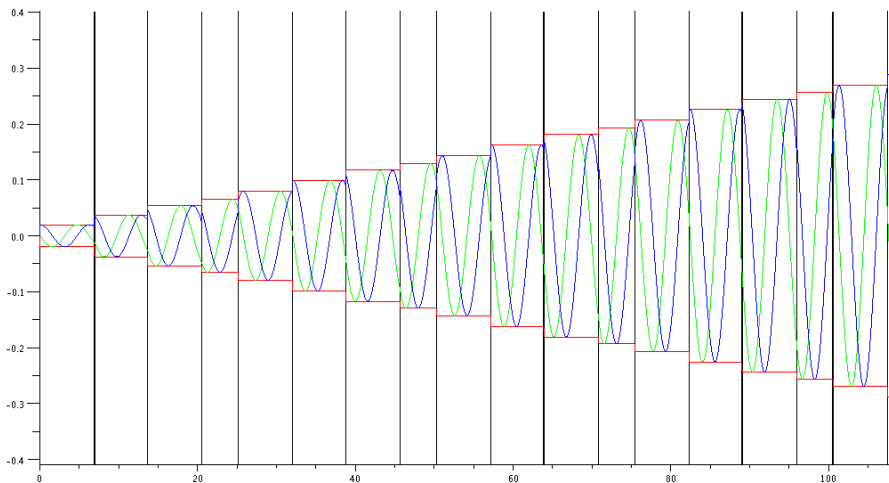
$$\langle \phi_2, \Upsilon_t^u(\phi_2) \rangle$$

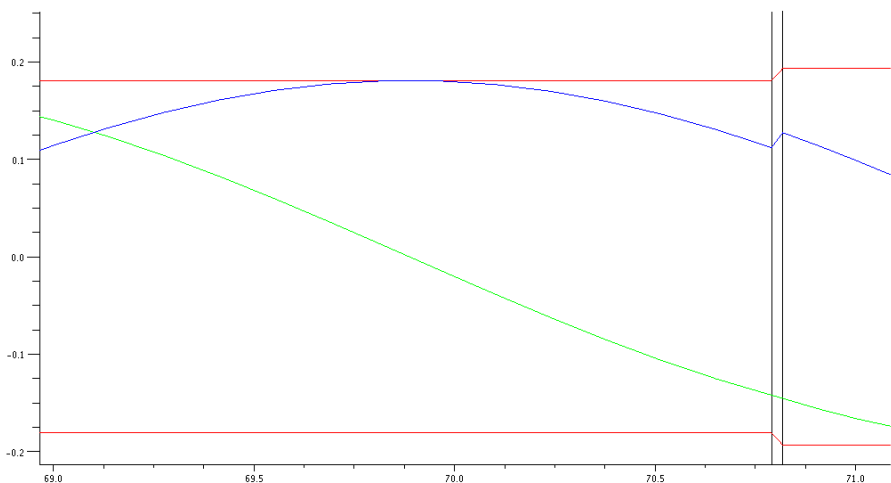
$\langle \phi_2, \Upsilon_t^u(\phi_1) \rangle$  : plan complexe

$\langle \phi_2, \Upsilon_t^u(\phi_1) \rangle$  : évolution temporelle  $t \in [0, T]$

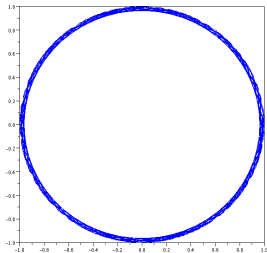




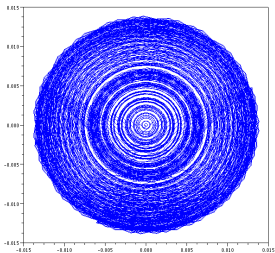
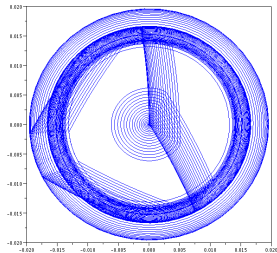
$\langle \phi_2, \Upsilon_t^u(\phi_1) \rangle$  : évolution temporelle

$\langle \phi_2, \Upsilon_t^u(\phi_1) \rangle$  : évolution temporelle

$$\langle \phi_3, \Upsilon_t^u(\phi_3) \rangle$$

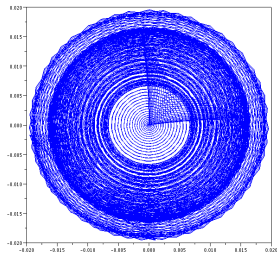


$$\langle \phi_2, \Upsilon_t^u(\phi_3) \rangle$$

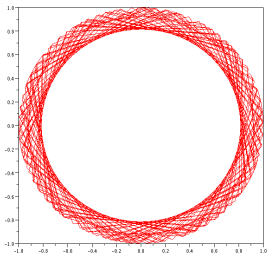


$$\langle \phi_3, \Upsilon_t^u(\phi_1) \rangle$$

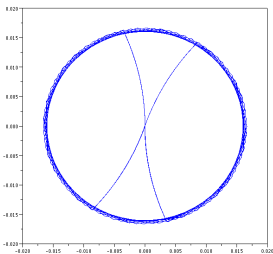
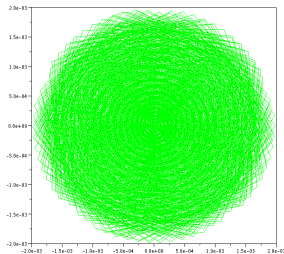
$$\langle \phi_3, \Upsilon_t^u(\phi_2) \rangle$$



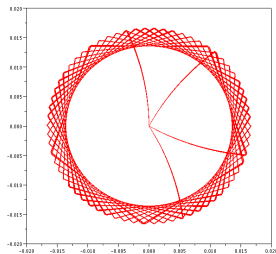
$$\langle \phi_4, \Upsilon_t^u(\phi_4) \rangle$$



$$\langle \phi_4, \Upsilon_t^u(\phi_1) \rangle$$



$$\langle \phi_3, \Upsilon_t^u(\phi_4) \rangle$$



$$\langle \phi_4, \Upsilon_t^u(\phi_3) \rangle$$

# Résumé

La loi de commande permet au propagateur de passer de

$$\pi_N \Upsilon_0^u = I_N,$$

à

$$\pi_N \Upsilon_T^u \approx \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_1} & 0 & \dots & \\ e^{i\theta_2} & 0 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & e^{i\theta_3} & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ & \vdots & \vdots & 0 & e^{i\theta_N} \end{pmatrix}$$

i.e. d'échanger les états 1 et 2 de façon approchée sans changer les autres états.

- On peut montrer que  $\|(\text{Id} - \pi_N)\Upsilon_t^u(\phi_j)\| < 10^{-5}$  si  $N = 15, j = 1, 2$  pour tout  $t$ .

# Conclusions

- On a trouvé des conditions suffisantes pour la contrôlabilité approchée simultanée.
- La méthode est constructive et nous permet d'implémenter un algorithme pour réaliser explicitement la loi de commande ;
- on peut faire des simulations numériques ;
- on peut estimer la norme  $L^1$  du contrôle.

# Conclusions

- On a trouvé des conditions suffisantes pour la contrôlabilité approchée simultanée.
- La méthode est constructive et nous permet d'implémenter un algorithme pour réaliser explicitement la loi de commande ;
- on peut faire des simulations numériques ;
- on peut estimer la norme  $L^1$  du contrôle.

# Projet

## Short-term

- **contrôlabilité en  $H^s$  ;**
- équivalence entre la contrôlabilité par différents types de lois de commande ;
- estimations sur le temps de contrôlabilité.

## Mid-term

- $A$  à spectre mixte ;
- contrôlabilité en projection :  $\psi_1, \dots, \psi_n \in \mathbb{C}$ ,  $\psi_0 \in \mathcal{H}$  étant données, trouver  $u$  telle que  $\pi_n(\Upsilon_T^u(\psi_0)) = (\psi_1, \dots, \psi_n)$  ;
- molecule  $3D$ .

Merci de votre attention ! Grazie !



# Projet

## Short-term

- contrôlabilité en  $H^s$  ;
- équivalence entre la contrôlabilité par différents types de lois de commande ;
- estimations sur le temps de contrôlabilité.

## Mid-term

- $A$  à spectre mixte ;
- contrôlabilité en projection :  $\psi_1, \dots, \psi_n \in \mathbb{C}$ ,  $\psi_0 \in \mathcal{H}$  étant données, trouver  $u$  telle que  $\pi_n(\Upsilon_T^u(\psi_0)) = (\psi_1, \dots, \psi_n)$  ;
- molécule 3D.

Merci de votre attention ! Grazie !

# Projet

## Short-term

- contrôlabilité en  $H^s$  ;
- équivalence entre la contrôlabilité par différents types de lois de commande ;
- estimations sur le temps de contrôlabilité.

## Mid-term

- $A$  à spectre mixte ;
- contrôlabilité en projection :  $\psi_1, \dots, \psi_n \in \mathbb{C}$ ,  $\psi_0 \in \mathcal{H}$  étant données, trouver  $u$  telle que  $\pi_n(\Upsilon_T^u(\psi_0)) = (\psi_1, \dots, \psi_n)$  ;
- molécule 3D.

Merci de votre attention ! Grazie !

# Projet

## Short-term

- contrôlabilité en  $H^s$  ;
- équivalence entre la contrôlabilité par différents types de lois de commande ;
- estimations sur le temps de contrôlabilité.

## Mid-term

- $A$  à spectre mixte ;
- contrôlabilité en projection :  $\psi_1, \dots, \psi_n \in \mathbb{C}$ ,  $\psi_0 \in \mathcal{H}$  étant données, trouver  $u$  telle que  $\pi_n(\Upsilon_T^u(\psi_0)) = (\psi_1, \dots, \psi_n)$  ;
- molécule 3D.

Merci de votre attention ! Grazie !

# Projet

## Short-term

- contrôlabilité en  $H^s$  ;
- équivalence entre la contrôlabilité par différents types de lois de commande ;
- estimations sur le temps de contrôlabilité.

## Mid-term

- $A$  à spectre mixte ;
- contrôlabilité en projection :  $\psi_1, \dots, \psi_n \in \mathbb{C}$ ,  $\psi_0 \in \mathcal{H}$  étant données, trouver  $u$  telle que  $\pi_n(\Upsilon_T^u(\psi_0)) = (\psi_1, \dots, \psi_n)$  ;
- molécule 3D.

Merci de votre attention ! Grazie !

# Projet

## Short-term

- contrôlabilité en  $H^s$  ;
- équivalence entre la contrôlabilité par différents types de lois de commande ;
- estimations sur le temps de contrôlabilité.

## Mid-term

- $A$  à spectre mixte ;
- contrôlabilité en projection :  $\psi_1, \dots, \psi_n \in \mathbb{C}$ ,  $\psi_0 \in \mathcal{H}$  étant données, trouver  $u$  telle que  $\pi_n(\Upsilon_T^u(\psi_0)) = (\psi_1, \dots, \psi_n)$  ;
- molécule 3D.

Merci de votre attention ! Grazie !

# Projet

## Short-term

- contrôlabilité en  $H^s$  ;
- équivalence entre la contrôlabilité par différents types de lois de commande ;
- estimations sur le temps de contrôlabilité.

## Mid-term

- $A$  à spectre mixte ;
- contrôlabilité en projection :  $\psi_1, \dots, \psi_n \in \mathbb{C}$ ,  $\psi_0 \in \mathcal{H}$  étant données, trouver  $u$  telle que  $\pi_n(\Upsilon_T^u(\psi_0)) = (\psi_1, \dots, \psi_n)$  ;
- molécule 3D.

Merci de votre attention ! Grazie !