



TEORIA DEL CONTROLLO

Coordinatore Prof. A. A. Agrachev
Settore di Matematica Applicata

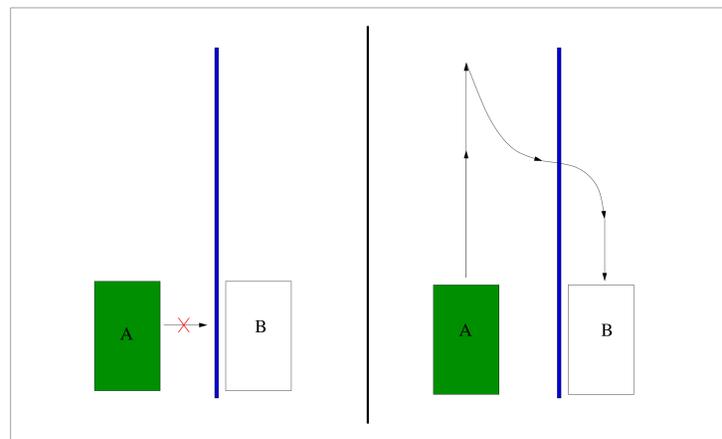


Introduzione

Il mondo fisico è descritto da sistemi dinamici regolati da leggi deterministiche tali per cui il futuro di un sistema è completamente deciso dalle condizioni iniziali. Inoltre il futuro prossimo cambia con continuità al variare del dato iniziale. Se introduciamo il **libero arbitrio** in questo mondo fatalistico incontriamo i sistemi di controllo. Per farlo non facciamo altro che permettere a dei parametri del sistema di variare liberamente nel tempo. È quello che accade nella vita quotidiana quando muoviamo il nostro corpo, guidiamo l'auto, cuciniamo i cibi nel forno ed è anche il principio per cui possiamo condurre velivoli e attuare processi tecnologici. Noi **controlliamo** questi sistemi dinamici!
Un sistema di controllo è un sistema dinamico su cui possiamo agire modificando degli opportuni parametri detti **controlli**. I sistemi dinamici sono governati da equazioni differenziali. Un sistema di controllo è dunque una famiglia di sistemi dinamici ognuno dipendente dal valore assunto dal controllo.

Controllabilità 1

Un problema classico della Teoria del Controllo è lo studio della **controllabilità**, ovvero ci si chiede se, dato un sistema di controllo, è possibile raggiungere uno stato B partendo da uno stato A. Il caso interessante è quello in cui sono presenti **vincoli** per il sistema, di natura meccanica o fisica, che ne impediscano il moto. L'esempio classico è quello di un'automobile. La struttura delle ruote ne impedisce il movimento laterale. Tuttavia con una manovra possiamo parcheggiare, quindi muoverci lateralmente. In qualche modo siamo in grado, grazie ai movimenti avanti/indietro e destra/sinistra, di "aggirare" il vincolo. Pertanto, "liberati" dal vincolo, possiamo portare un'automobile da una qualsiasi posizione A ad una posizione finale B. In tal caso il sistema si dice completamente controllabile.



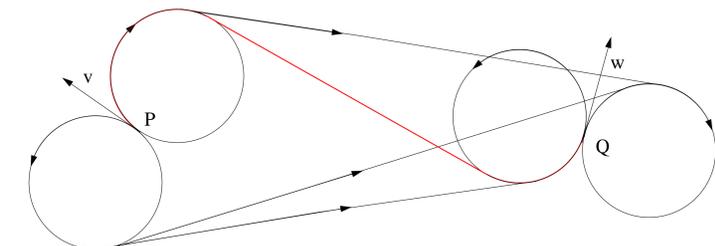
Controllabilità 2

Consideriamo, ora, un gatto che cade da una certa altezza. È noto che "i gatti cadono sempre sulle zampe". Osserviamo anche che, se proviamo a tuffarci da una piattaforma, compiere delle evoluzioni e muovere il nostro corpo durante la discesa è molto difficile. Questo effetto è dovuto ad una legge fisica denominata **Legge di conservazione del momento angolare**. Tale legge costituisce per un sistema in caduta, come un gatto o un tuffatore olimpionico, un vincolo che fa in modo che un oggetto "atterri come è partito" come se fosse un sasso o un tronco di legno. Tuttavia il gatto inarcando la schiena e compiendo una serie di piccole rotazioni di parti del proprio corpo riesce a ruotare tutto il corpo senza per questo violare tale legge e ad atterrare sempre sulle zampe. Questo è un altro classico esempio di controllabilità.



Controllo Ottimo

Una volta stabilito che possiamo raggiungere un certo stato è naturale chiedersi se possiamo farlo nel modo **migliore**. In altre parole si considera il problema di arrivare in una certa posizione in tempo minimo oppure consumando la quantità minore possibile di carburante o ancora nel modo più efficiente. La luce si muove in modo da minimizzare il tempo di percorrenza. Quando guidiamo è opportuno evitare bruschi sbalzi di velocità per evitare sprechi di carburante. Per costruire un generatore conviene cercare di massimizzarne l'efficienza, cioè il rapporto tra potenza ottenuta e consumata.
Un esempio classico di problema di controllo ottimo è la **Macchina di Dubins**, studiato per la prima volta da A. Markov nel 1887. Consideriamo un'automobile che si muove nel piano. I movimenti possibili sono la traslazione in avanti e la rotazione con velocità angolare limitata. Date una posizione e un'orientazione iniziali e finali il problema consiste nel guidare l'auto dalla configurazione iniziale a quella finale in tempo minimo. Risulta che una traiettoria ottimale esiste ed è costituita da archi di circonferenze e segmenti. Nella figura possiamo osservare la costruzione geometrica di un percorso ottimale.



Bibliografia

1. A. Agrachev, Y. Sachkov, *Control Theory from the Geometric Viewpoint*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 87, Springer-Verlag, Berlin 2004, Control Theory and Optimization, II.
2. U. Boscain, B. Piccoli, *Optimal Syntheses for Control Systems on 2-D Manifolds*, Mathematics and Applications, vol. 43, Springer-Verlag, Berlin 2004.

Ringraziamo Francesco Zingaretti e Luca Heltai per la gentile concessione dei mezzi necessari alla realizzazione di questa presentazione.